Ejercicio 1.

Considere el siguiente subconjunto de P_3

$\mathrm{S} = \left\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\right\}$ forme una base para el espacio vectorial P_3.

1. Dan

$\mathrm{S} = \left\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\right\}$

2. Piden

Formar una base para el espacio vectorial P_3.

3. Plan

a. Demostrar que S genera a P_3.

- Tomar elementos arbitrarios.
- Mirar si es combinación lineal.

b. Demostrar que es linealmente independiente.

4. Ejecución

$\mathrm{at}^3+\mathrm{bt}^2+\mathrm{ct}+\mathrm{d} = \alpha_1(t^3 + t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t^2 + 1) + \alpha_3(t^3 - 2t) + \alpha_4(2t^3 + 3t^2 - 4t + 3)$

$= (\alpha_1 t^3 + \alpha_1 t^2 - 2\alpha_1 t + \alpha_1 1) + (\alpha_2 t^2 + \alpha_2) + \alpha_3(\alpha_3 t^3 - 2\alpha_3 t) + (2\alpha_4 t^3 + 3\alpha_4 t^2 - 4\alpha_4 t + 3\alpha_4)$

$= (\alpha_1 t^3 + \alpha_3 t^3 + 2\alpha_4 t) + (\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^2 + 3\alpha_4 t^2) + (-2\alpha_1 t - 2\alpha_3 t - 4\alpha_4 t) + (\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_4)$

$\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = a$

$\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_4 = b$

$-2\alpha_1 - 2\alpha_3 - 4\alpha_4 = c$

$\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = d$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 & 3 & b \\ -2 & 0 & -2 & -4 & c \\ 1 & 1 & 0 & 3 & d \end{pmatrix}$$

$\mathrm{despues\ de\ hacer\ reducciones\ de\ Gauss - Jordan\ el\ sistema\ quedaria\ asi}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a + c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b + c + d - a \end{pmatrix}$$

Como 2 filas constans de solo ceros, se produce una inconsistencia en el sistema por lo tanto, para que el sistema sea consistente se necesita que:

$2a + c = 0$

$-2a = c$

$-b + c + d - a = 0$

$-b - 2a + d + a = 0$

$-3a - b + d = 0$

Como se dio un sistema incosistente, entonces el subconjunto $\mathrm{S} = \left\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\right\}$ no es una base para P_3, ya que los polinomios de grado tres deben cumplir las condiciones dadas anteriormente.

En conclusión, algunos polinomios cumplirian esa condición pero no todos.